LS El Alia DEVOIR DE CONTROLE N°1 AS : 2019/2020

Prof: Tlich Ahmed (4ième science 2) Durée: 2h

**Exercice n°1 : ( 7 points)**

1) a) Vérifier que : $(1-i\sqrt{3})^{2}= -2-2i\sqrt{3}$

 b) Résoudre dans $C$ l’équation : $Z^{2}-\left(3+i\sqrt{3 } \right) Z+2+2i\sqrt{3}=0$

2) Le plan complexe est munie d’un repère orthonormé direct (O,).

On considère les points *I*, A, B et C d’affixes respectifs : $Z\_{I}$ = 2 , ZA = 1 + i, ZB = + i et ZC = $Z\_{A}+Z\_{B}$

 a) Ecrire ZA  et Z B sous forme exponentielle.

 b) Construire les points A et B dans le repère.

 c) Monter que OA C B est un losange puis construire le point C.

3)a) Ecrire ZC sous forme algébrique puis déduire que : OC =$\sqrt{2}+\sqrt{6}.$

 b) Vérifier que : $2\cos(\left(\frac{π}{12}\right))e^{i\frac{π}{4}}= e^{i\frac{π}{3}}+e^{i\frac{π}{6}}$

 c) Déduire que $Z\_{C}=4\cos(\left(\frac{π}{12}\right))e^{i\frac{π}{4}}$

 d) Déduire la valeur exacte de $\cos(\left(\frac{π}{12}\right))$.

4) Soit D le point d’affixe ZD = $2+Z\_{B}$.

 a) Montrer que D appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}+\sqrt{6}.$

 b) Montrer que les droites (AC) et (ID) sont parallèles

 c) Construire le point D en justifiant votre réponse.

**Exercice n°2 : ( 7 points)**

Soit la fonction définie sur par IR par $f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}} si x\geq 0\\ 1+x\sin(\frac{1}{x}) si x<0\end{array}\right.$

1) a) Montrer que pour tout $x\in \left]-\infty ,0\right[$ $on$ a : $1+x\leq f\left(x\right)\leq 1-x$

 b) Déduire $\lim\_{x\to 0^{-}}f(x)$.

 c) Montrer que f est continue en 0.

2) Montrer que $\lim\_{x\to -\infty }f(x)$ =2

3) Calculer $\lim\_{x\to +\infty }f(\frac{1}{x^{2}+2})$ , $\lim\_{x\to 1^{+}}f(\frac{1}{\sqrt{x-1}})$ et $\lim\_{x\to 0^{+}}\frac{f\left(x\right)}{f\left(x\right)-1}$

4) Soit la fonction h définie sur $\left[0,+\infty \right[$ par h(x) = f(x) - x

 a) Montrer que h est strictement décroissante sur $\left[0,+\infty \right[$ puis dresser son tableau de variation.

 b) Déduire que l'équation f(x) = x admet une unique solution $α $dans $\left[0,+\infty \right[ $puis

 vérifier que : $0.7<α<0,8$.

 5) Soit la fonction g définie sur $\left[0,\frac{π}{2}\right[$ par g(x ) = f(tanx).

 a) Montrer que g est continue sur $\left[0,\frac{π}{2}\right[$.

 b) Montrer que g est prolongeable par continuité à gauche en $\frac{π}{2}$ .

 c) Vérifier que pour tout $xϵ\left[0,\frac{π}{2}\right[$ : g(x) = cos x

**Exercice n°3 : ( 6 points)**

 Soit (Un) et (Vn) les suites définies sur IN par :

 $U\_{0}=1 , V\_{0}=2 , U\_{n+1}=\frac{U\_{n }+ V\_{n}}{2} et V\_{n+1}=\frac{U\_{n+1} + V\_{n}}{2}$

1) Soit la suite (Wn) définie sur IN par : $W\_{n}=V\_{n}-U\_{n}$

 a) Montrer que (Wn) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$

 b) Déduire que tout entier naturel n : $U\_{n}\leq V\_{n}$

 c) Montrer que (Un) est croissante et que (Vn) est décroissante.

 d) Déduire que les deux suites (Un) et (Vn) convergent vers la même limite $l$ et que $1\leq l\leq 2$

2) Soit (Sn) la suite définie sur IN\* par : $S\_{n}= \sum\_{k=0}^{n-1}w\_{k}$ .

 a) Calculer (Sn) en fonction de n.

 b) Vérifier que pour tout entier naturel k on a : $U\_{k+1}-U\_{k}=\frac{1}{2}W\_{k}$

 c) Déduire que pout tout n $ϵ $IN\* on a : $U\_{n}=U\_{0}+\frac{1}{2} S\_{n}$

 d) Déduire la limite $l$ de $(U\_{n}$).

***Bon travail***